

PERSPECTIVES AVEC MIGRATIONS

Si les perspectives démographiques qui font intervenir les naissances et les décès dans une population fermée, reposent déjà sur de nombreuses hypothèses (L. Henry, 1973), celles qui introduisent en plus l'effet de migrations professionnelles (R. Pressat, 1957) ou spatiales (L. Henry, 1973; F. Cazin, 1975; A. Rogers et F. Willekens, 1986) conduisent à une complexité encore plus grande. Bien entendu, il ne peut être question, ici, d'examiner toutes ces hypothèses. Nous préférons en discuter plus à fond une seule qui nous paraît, à la fois, être très différente des hypothèses sur les naissances et les décès dans les perspectives classiques et cependant avoir un effet très important sur les perspectives avec migrations.

Nous présenterons dans un premier temps cette hypothèse qui porte sur les taux pertinents en vue de réaliser une perspective avec migration, en indiquant les raisons qui ont conduit à son adoption et à sa très fréquente utilisation. Nous montrerons ensuite les raisons qui nous amènent à douter de sa validité et introduirons un indice plus conforme à de nombreuses observations. L'utilisation de ce dernier indice n'est cependant pas sans dangers et peut même conduire dans certains cas à des résultats absurdes. C'est la raison qui nous amènera à proposer un modèle en temps continu qui permet d'éviter ces inconvénients.

I. – Une hypothèse fréquemment adoptée

Les recensements posent de plus en plus souvent une question sur le lieu de résidence à une date antérieure donnée (D. Courgeau, 1988) : ainsi en France, depuis le recensement de 1962, on a posé une question sur le lieu de résidence le premier janvier de l'année du recensement antérieur.

L'utilisation des réponses à cette question permet d'améliorer les perspectives avec migrations, qui utilisaient auparavant les soldes migratoires intercensitaires, estimés de façon très approchée, par différence. On dispose maintenant de flux entre régions d'un pays donné, portant sur une période précise, ce qui offre de nouvelles possibilités. Pour aller plus avant, des hypothèses sont cependant nécessaires, en particulier sur les taux à utiliser qui peuvent être élaborés de diverses façons et conduire à des résultats différents.

On peut en premier lieu rapporter le flux d'émigration d'une région vers une autre à la population de la région d'origine, prise à la date antérieure. On mesure dès lors cette émigration par des quotients analogues aux quotients perspectifs de mortalité qui ont la signification d'une probabilité.

Mais on peut considérer ce même flux comme une immigration vers la région de destination que l'on rapporte, alors, à la population initiale ou moyenne de cette région. Ces indices s'écartent des indices classiques en démographie car les événements qui figurent au numérateur ne concernent pas de membres déterminés de la population qui figurent au dénominateur. On ne peut plus les assimiler à des probabilités.

C'est la raison pour laquelle on considère qu'il est préférable de mesurer les mouvements de i vers j par des indices ou quotients d'émigration de i vers j , que par des indices d'immigration en j d'habitants de i : « On évite, en particulier, le risque du résultat absurde auquel on s'expose avec des taux d'immigration : obtenir un nombre d'immigrants supérieur à celui des immigrants possibles » (L. Henry, 1973, p. 83).

Une fois cette hypothèse posée, on peut calculer, à l'aide des données d'un recensement sur les flux entre n régions, $n(n-1)$ taux d'émigration d'une zone vers une autre, et cela pour chaque groupe d'âges considéré. Si l'on dispose également des taux de mortalité et de fécondité pour les mêmes groupes d'âges et pour chacune de ces régions, il est dès lors possible de réaliser des perspectives multirégionales (F. Cazin, 1975; A. Rogers et F. Willekens, 1986).

Lorsque l'on considère que ces taux restent constants à l'avenir, ces perspectives basées sur un modèle de Markov conduisent à un état stable caractérisé à la fois par une répartition régionale par âge constante, et une répartition par région de la population totale constante (A. Rogers, 1975). Il est intéressant de noter que cette évolution vers des répartitions indépendantes du temps est réalisée en deux phases consécutives (A. Rogers, 1976) : intervient d'abord la stabilisation des structures par âges régionales, suivie par la stabilisation des populations régionales comparées à la population totale.

II. – Critique de cette hypothèse

L'utilisation des taux d'émigration va cependant à l'encontre de nombreux résultats empiriques, déjà établis depuis longtemps et maintes fois vérifiés. Toutes ces études ont montré que les flux de migration d'une zone i vers une zone j dépendent, non seulement, de la population d'origine, mais de façon aussi importante, de la population de la zone de des-

tion (G. Zipf, 1946 ; G. Steward, 1960 ; D. Courgeau, 1970 ; M. Poulain, 1981).

Ce résultat nous indique que, si la population de la zone i reste constante tandis que celle de la zone j croît régulièrement au cours du temps, on devrait s'attendre à une augmentation du nombre de migrants de i vers j , alors que le modèle précédent donne cet effectif comme constant quel que soit l'instant considéré. En effet, le taux d'émigration de i vers j étant supposé constant, le flux d'émigration de i vers j sera également constant puisque la population de la zone i reste inchangée. On voit donc dans ce cas combien cette perspective semble peu satisfaisante : elle risque de conduire à des résultats en contradiction avec les observations.

D'où l'idée d'élaborer un indice d'intensité migratoire qui garderait la signification probabiliste d'un taux d'émigration, mais qui permettrait de faire intervenir les populations de départ et d'arrivée. Nous avons montré (D. Courgeau, 1975) qu'il peut se définir comme la probabilité que deux individus tirés au hasard, l'un dans la population de la première zone à l'instant initial, l'autre dans la population de la seconde zone à l'instant final, soient identiques. Il s'agit bien entendu d'individus en vie et présents dans le pays aux deux dates.

Un tel indice d'intensité migratoire peut se calculer par groupe d'âges et sa combinaison avec des taux régionaux de mortalité et de fécondité conduit à des perspectives de population très différentes de celles données par les taux d'émigration. On y observe un jeu beaucoup plus complexe entre les populations des diverses régions qui ne conduira en général pas à un état stable, comme dans le cas markovien.

Nous allons reprendre rapidement la formalisation d'un tel modèle (D. Courgeau, 1975, 1990), puis nous montrerons les résultats auxquels il conduit et, dans certains cas, les dangers de son utilisation.

III. – Formalisation et critique d'un modèle utilisant les intensités migratoires

Il n'est pas possible dans le cadre d'un article de développer ce modèle dans toute sa généralité, car nous verrons la complexité des cas auxquels il peut conduire. Nous ferons d'abord l'hypothèse que les populations sont soumises seulement au risque de migration interne entre régions d'un pays, sans migrations internationales et sans distinction de groupe d'âges. La population totale du pays reste dans ce cas constante au cours du temps. Bien entendu dans une étape ultérieure, il sera nécessaire de réintroduire ces divers effets qui alourdissent les calculs sans introduire de problèmes théoriques importants.

Nous présentons d'abord le modèle appliqué à un nombre quelconque de régions avant de restreindre l'analyse au cas de trois régions. Nous verrons que même dans ce cas simple, les résultats pourront être très compliqués, car le modèle n'est plus linéaire.

a) Présentation du modèle pour un nombre quelconque de régions

Nous disposons des données d'un recensement fait à la date t_1 , qui a posé une question sur la région de résidence à une date antérieure t_0 . L'indice d'intensité migratoire entre les zones i et j , s'écrit :

intensité migratoire entre les zones i et j , s'écrit :

$$m_{ij} = \frac{M_{ij}(t_0, t_1)}{P_i(t_0) P_j(t_1)} \quad [1]$$

où $M_{ij}(t_0, t_1)$ est l'effectif de migrants de i vers j , $P_i(t_0)$ la population originaire de i en t_0 qui survit dans le pays en t_1 , $P_j(t_1)$ la population recensée en j en t_1 , originaire du pays en t_0 .

Si l'on suppose que ces indices restent constants après t_1 , on peut écrire, pour chaque zone j , la relation suivante :

$$P_j(t_2) = P_j(t_1) + \sum_{i \neq j} m_{ij} P_i(t_1) P_j(t_2) - \sum_{i \neq j} m_{ji} P_j(t_1) P_i(t_2) \quad [2]$$

reliant les populations attendues à la date t_2 (telle que $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$) aux populations recensées à la date t_1 , et aux divers indices d'intensité.

Du fait que la population totale du pays reste constante, cela conduit à un système de $(n - 1)$ équations linéaires avec second membre, dont les variables sont les populations de $(n - 1)$ zones à la date t_2 . On montre que ces équations ont en général une solution unique, qui permet d'estimer chaque population à la date t_2 en fonction des populations observées en t_1 et des indices d'intensité (D. Courgeau, 1975, 1990). Indiquons seulement que contrairement au modèle markovien, le vecteur des populations $P(t_2)$ n'est plus le résultat d'une application linéaire du vecteur $P(t_1)$ dans l'espace, R^n mais d'une application beaucoup plus complexe dont le vecteur transformé peut se trouver hors du domaine de définition des populations.

Nous n'allons pas plus avant ici dans la solution du système général, mais nous préférons examiner plus en détail le cas de trois sous-populations pour poser les problèmes que soulève ce type de modèle.

b) Problèmes posés par ce modèle dans le cas de trois régions

Comme la population totale du pays, p , reste constante au cours du temps, il suffit de

considérer ici de x populations seulement $P_1(t_n)$ et $P_2(t_n)$, que nous noterons désormais pour simplifier x_n et y_n , avec $P_3(t_n) = z_n = p - x_n - y_n$. Nous

prendrons également comme unité de temps la période intercensitaire, ce qui conduit à la récurrence autonome du deuxième ordre :

$$\begin{cases} x_{n+1}[1 - m_{31}p + m_{31}x_n + (m_{31} - m_{21})y_n] = x_n[1 - m_{13}p + m_{13}x_{n+1} + (m_{13} - m_{12})y_{n+1}] \\ y_{n+1}[1 - m_{32}p + (m_{32} - m_{12})x_n + m_{32}y_n] = y_n[1 - m_{23}p + (m_{23} - m_{21})x_{n+1} + m_{23}y_{n+1}] \end{cases} \quad [3]$$

On peut résoudre ce système linéaire à deux variables x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n ainsi que des indices d'intensité :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \\ x_n \frac{(m_{12} - m_{13})(1 - m_{23}p)y_n - [1 - m_{32}p + (m_{32} - m_{12})x_n + (m_{32} - m_{23})y_n](1 - m_{13}p)}{D} \\ y_{n+1} = \\ y_n \frac{(m_{21} - m_{23})(1 - m_{13}p)x_n - [1 - m_{31}p + (m_{31} - m_{13})y_n + (m_{31} - m_{21})y_n](1 - m_{23}p)}{D} \end{cases} \quad [4]$$

où le dénominateur D s'écrit :

$$D = (m_{12} - m_{13})(m_{21} - m_{23})x_n y_n - [1 - m_{31}p + (m_{31} - m_{13})x_n + (m_{31} - m_{21})y_n] \times [1 - m_{32}p + (m_{32} - m_{12})x_n + (m_{32} - m_{23})y_n] \quad [5]$$

On vérifie bien dans ce cas que cette récurrence n'est plus linéaire, mais se présente sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions quadratiques de x_n et y_n .

L'application de cette récurrence sur une dizaine de périodes conduit à des perspectives dont les résultats seront vite différents de ceux des perspectives markoviennes (D. Courgeau, 1990). C'est cependant sur le plus long terme que les divergences s'accroîtront. Il importe dès lors de dégager des éléments plus fondamentaux de cette récurrence.

Il est en premier lieu facile de déterminer ses points fixes (points qu'elle laisse inchangés tout au long du temps). Ce sont les solutions du système [3] ou [4] lorsqu'on pose $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = y_n$. On vérifie que ces points fixes sont au nombre de quatre : les trois premiers correspondent aux cas où l'une des trois sous-populations est égale à p , les deux autres étant nulles. Le quatrième est plus intéressant à considérer et correspond aux valeurs suivantes des trois sous-populations :

$$x_f^4 = \frac{p(m_{23} - m_{32})}{D_f^4}, y_f^4 = \frac{p(m_{31} - m_{13})}{D_f^4}, z_f^4 = \frac{p(m_{12} - m_{21})}{D_f^4} \quad [6]$$

$$\text{où } D_f^4 = m_{23} - m_{32} + m_{31} - m_{13} + m_{12} - m_{21}.$$

Dans notre cas, ce point fixe ne présente d'intérêt que s'il se trouve dans le domaine de définition des populations (x_f^A, y_f^A et z_f^A doivent être positives et inférieures à p). On vérifie que cela se produit lorsque D_f^A et chacune des trois différences ($m_{23} - m_{32}$), ($m_{31} - m_{13}$) et ($m_{12} - m_{21}$) sont de même signe. Dans tous les autres cas, le quatrième point fixe est hors du domaine de définition des populations et n'a pas à être pris en compte.

Pour avoir plus de précisions sur la stabilité (attraction ou répulsion) de ces divers points fixes, il est utile d'effectuer un changement de variable pour se centrer sur ce point fixe ($x'_n = x_n - x_f$; $y'_n = y_n - y_f$), puis de calculer le développement en série réduit aux termes linéaires de la nouvelle récurrence obtenue.

$$\begin{cases} x'_{n+1} = \left(\frac{\delta x'_{n+1}}{\delta x'_n} \right)_{pf} x'_n + \left(\frac{\delta x'_{n+1}}{\delta y'_n} \right)_{pf} y'_n + F_1(x'_n, y'_n) = a x'_n + b y'_n + F_1(x'_n, y'_n) \\ y'_{n+1} = \left(\frac{\delta y'_{n+1}}{\delta x'_n} \right)_{pf} x'_n + \left(\frac{\delta y'_{n+1}}{\delta y'_n} \right)_{pf} y'_n + F_2(x'_n, y'_n) = c x'_n + d y'_n + F_2(x'_n, y'_n) \end{cases} \quad [7]$$

où les divers paramètres sont les dérivées partielles au point p_f (x_f, y_f) et où les fonctions $F_i(x'_n, y'_n)$ sont les termes non linéaires d'ordre supérieur ou égal à deux. On calcule alors les multiplicateurs de ce point fixe, comme les racines de l'équation en S (voir I. Gumowski et C. Mira, 1980, pp. 158-159, pour plus de détails sur cette démonstration) :

$$(a - S)(d - S) - bc = 0. \quad [8]$$

La stabilité du point fixe est alors donnée par le théorème de Lattès : si tous les multiplicateurs S_i sont tels que $|S_i| < 1^{(1)}$ ce point fixe est attractif ou asymptotiquement stable, si un seul multiplicateur S_e est tel que $|S_e| > 1$, ce point est répulsif pour des conditions initiales prises dans un voisinage suffisamment petit du point fixe. Le cas particulier où ces modules sont égaux à l'unité, nécessite l'observation des termes de degré supérieur à 1 pour conclure.

Le calcul des multiplicateurs pour les trois premiers points fixes conduit au tableau 1.

On voit facilement que chaque point fixe a un de ses multiplicateurs égal à l'inverse de chacun des deux autres. Il suffit donc de considérer les trois quantités A, B, C, données dans le tableau 1. On constate alors que seul un des trois points pourra être attractif, les deux autres étant répulsifs. Mais inversement, les trois points pourront être répulsifs, comme

⁽¹⁾ Les racines du déterminant pouvant être imaginaires, il s'agit ici du module de la racine.

TABLEAU 1. — MULTIPLICATEURS CORRESPONDANTS AUX TROIS PREMIERS POINTS FIXES OÙ L'UNE DES POPULATIONS EST ÉGALE À p LES DEUX AUTRES ÉTANT NULLES

Point fixe \ Multiplificateur	(0,0)	(p,0)	(0,p)
S_1	$\frac{1 - m_{13}p}{1 - m_{31}p} = A$	$\frac{1 - m_{31}p}{1 - m_{13}p} = \frac{1}{A}$	$\frac{1 - m_{12}p}{1 - m_{21}p} = \frac{1}{C}$
S_2	$\frac{1 - m_{23}p}{1 - m_{32}p} = B$	$\frac{1 - m_{21}p}{1 - m_{12}p} = C$	$\frac{1 - m_{32}p}{1 - m_{23}p} = \frac{1}{B}$

on peut le vérifier facilement. La connaissance des intensités permet facilement de déterminer la solution dans laquelle on se trouve. Nous laissons ici de côté les cas critiques où $S_1 = \pm 1$ et $|S_2| \neq 1$ ou $S_1 = S_2 = 1$ dont on sait déterminer la stabilité (I. Gumowski et C. Mira, 1980).

En nous centrant sur le quatrième point fixe, il est aisé d'obtenir les expressions des diverses dérivées en ce point⁽²⁾. On vérifie que dans ce cas la relation : $ad - bc = 1$ est vérifiée et que les multiplicateurs sont :

$$S = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2} \quad [9]$$

Lorsque $|a + d| > 2$, on a deux multiplicateurs réels et l'on vérifie aisément que l'un de ces multiplicateurs est toujours en module supérieur à l'unité. Le quatrième point fixe est donc dans ce cas répulsif. Lorsque $|a + d| < 2$, on a deux multiplicateurs imaginaires conjugués que l'on peut écrire $\exp(\pm j\varphi)$, où j est le nombre imaginaire ($\sqrt{-1}$) et φ un angle tel que $\cos \varphi = (a + d)/2$. On peut dès lors par un changement de variable approprié $u = (x + y)/2$ et $v = -j(x - y)/2$ écrire la récurrence autour de ce point fixe, appelé dans ce cas « centre » :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \cos \varphi - v_n \sin \varphi + F_1(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = u_n \sin \varphi + v_n \cos \varphi + F_2(u_n, v_n) \end{cases} \quad [10]$$

Si $F_1(u_n, v_n)$ et $F_2(u_n, v_n)$ étaient identiques à zéro, on obtiendrait des courbes invariantes circulaires pour les populations transformées (trajectoires en fait elliptiques pour les populations elles-mêmes). Du fait que ces termes sont en général non nuls, l'allure des trajectoires discrètes au voisinage du point p_f^4 lorsqu'il est dans le domaine de définition des populations, va dépendre des termes d'ordre supérieur ou égal à deux. L'exa-

(2) Vu la lourdeur des calculs, nous ne les détaillons pas ici, mais le lecteur intéressé peut nous les demander.

men de ces termes de calcul très lourd et l'absence d'une solution simple sur l'allure des trajectoires dans le cas général (I. Gumowski et C. Mira, 1980), nous conduit à en examiner les solutions à l'aide de simulations.

On constate numériquement que, lorsque les flux migratoires sont faibles par rapport à la population de départ et d'arrivée et que le point p_f^4 est dans le domaine de définition des populations, on obtient des trajectoires cycliques tournant autour de ce point fixe p_f^4 . Lorsque le point p_f^4 est hors du domaine de définition des populations, en général⁽³⁾, deux des sous-populations vont tendre vers zéro, la troisième comprenant l'ensemble de la population p . Cette sous-population est celle pour laquelle les deux multiplicateurs sont en modules inférieurs à l'unité.

Donnons ici quelques exemples d'application de ces projections. La figure 1 donne les diverses populations y_n en fonction des populations x_n dans deux cas qui partent de la même distribution des sous-populations initiales $p_0 = (200, 460, 340)$, mais avec des intensités différentes.

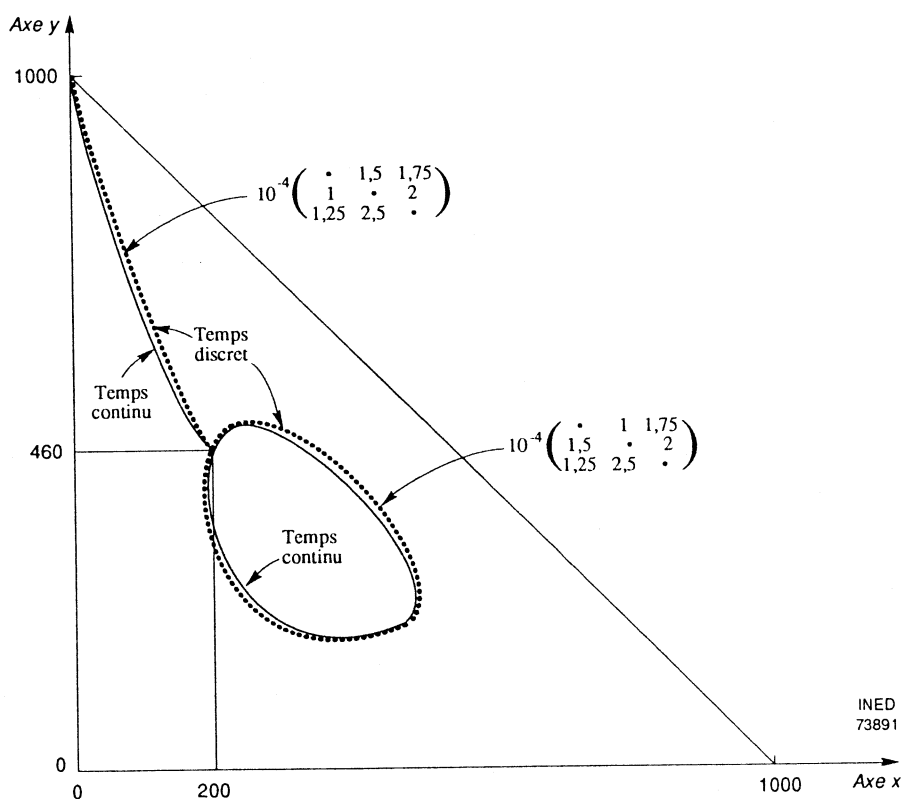


Figure 1. — Variation des populations y_n (cf. $y(t)$) en fonction de x_n (cf. $x(t)$) dans le cas d'une trajectoire fermée et dans le cas d'une trajectoire tendant vers le point $(0, 1000)$, partant de populations initiales identiques $(200, 460, 340)$.

⁽³⁾ Il est également possible que seule l'une des sous-populations tende vers zéro, les autres tendant vers des valeurs fixes.

Dans le premier cas, on a les intensités suivantes en p . 10 000 :

$$m_{12} = 1; m_{13} = 1,75; m_{21} = 1,5; m_{23} = 2; m_{31} = 1,25 \text{ et } m_{32} = 2,5.$$

On vérifie d'abord que les valeurs de $A = 0,943$, $B = 1,067$ et $C = 0,944$ montrent que les trois sommets du domaine de définition sont répulsifs. En revanche, on voit que $D_f^A = -1,5$ et que chacune des différences : $(m_{23} - m_{32}) = -0,5$, $(m_{31} - m_{13}) = -0,5$ et $(m_{12} - m_{21}) = -0,5$ sont égales entre elles et de même signe que D_f^A . Il en résulte que le quatrième point fixe est dans le domaine de définition des populations. On vérifie dans ce cas que l'on observe bien une courbe fermée lorsque l'on porte x_{n+1} en fonction de x_n (figure 1). Si l'on porte les populations successives en fonction de la durée écoulée depuis le début des perspectives, on obtient pour chaque sous-population des courbes périodiques, de même période ($T = 188,43$) mais décalées les unes par rapport aux autres, de façon que leur somme soit toujours égale à $p = 1\ 000$ (figure 2). Quel que soit le nombre d'itérations, si élevé soit-il⁽⁴⁾, nous n'avons observé aucune déformation de la courbe, qui semble être une trajectoire stable.

Dans le second cas, nous avons juste interverti les intensités m_{12} et m_{21} . Les valeurs de A et B restent identiques à ce qu'elles étaient dans le cas précédent, alors que la valeur de C devient égale à 1,059 : dans ce

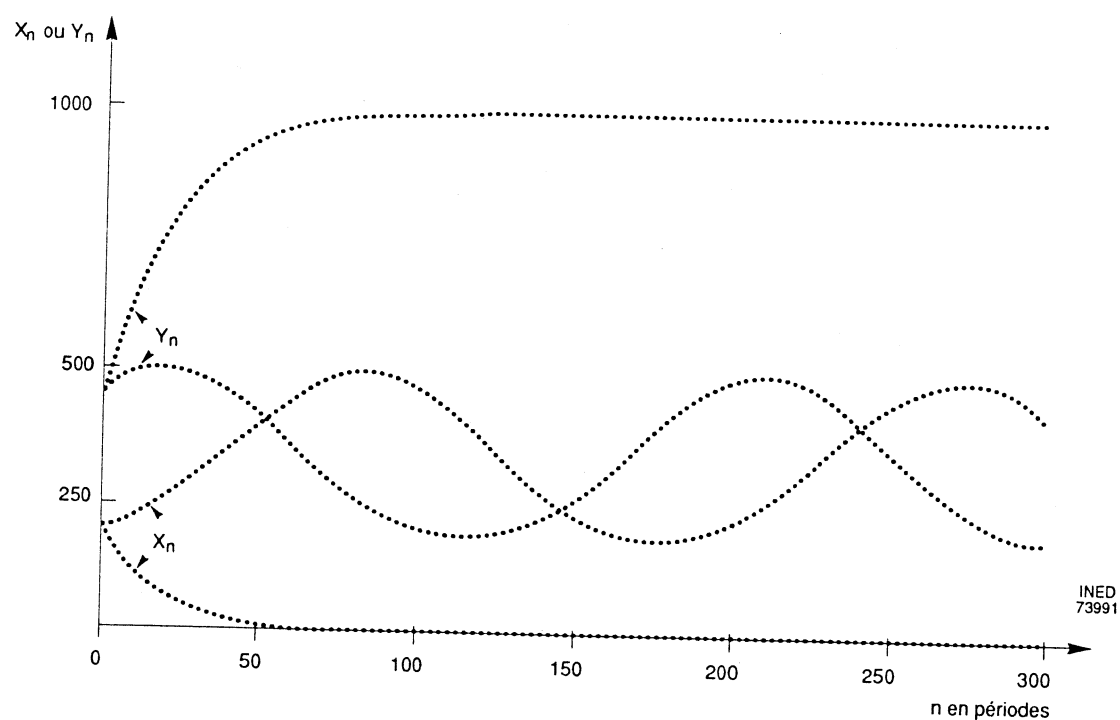


Figure 2. — Variation des populations x_n et y_n en fonction de la période intercensitaire n dans les deux cas décrits dans la figure 1.

(4) Nous avons dépassé le million d'itérations sans dégager une moindre déviation de la trajectoire.

cas, le point fixe $(0, p)$ va devenir attractif. En revanche, on vérifie que $D_f^4 = -0,5$ et que seule la différence $(m_{12} - m_{21}) = 0,5$ va devenir positive. Il en résulte que le quatrième point fixe est hors du domaine de définition des populations. On vérifie que l'on obtient des valeurs de y_n fonction de x_n qui vont tendre de façon régulière vers le point attractif (figure 1). Si l'on porte les sous-populations successives en fonction de la durée écoulée depuis le début des perspectives, on obtient pour la sous-population y_n , une courbe qui va tendre vers la population totale, les autres sous-populations tendant vers zéro (figure 2).

Comme on le voit, ces résultats sont très différents de ceux que donne le cas markovien où les sous-populations tendent, en général, vers une solution limite non nulle. Ici, ou bien aucune solution limite n'existe et les sous-populations oscillent périodiquement, ou bien cette solution limite conduit à l'extinction de toutes les populations, sauf une. D'autres cas peuvent encore se produire, comme nous allons le voir maintenant.

En particulier, dès que les flux commencent à prendre de l'importance par rapport aux diverses sous-populations de départ ou d'arrivée, des situations nouvelles apparaissent.

Ainsi, lorsque l'un ou plusieurs des indices d'intensité sont supérieurs à l'inverse de la population totale du pays, on montre que (D. Courgeau, 1990), dans certains cas, les sous-populations peuvent sortir de leur domaine de définition au cours des itérations : certaines peuvent devenir négatives, d'autres peuvent devenir supérieures à la population totale. En revanche, si toutes les intensités sont inférieures à l'inverse de la population totale, les sous-populations prévues seront toujours dans le domaine de définition.

Illustrons cette sortie du domaine de définition, en reprenant les indices du premier cas traité dans cet article et en redéfinissant seulement les valeurs de deux intensités : $m_{12} = 17$ p. 10 000 et $m_{31} = 16,5$ p. 10 000. La valeur de $A = 1,077$ devient supérieure à l'unité, ce qui fait que le point fixe $(p, 0)$ devient attractif. Cependant, on vérifie facilement que le quatrième point fixe est toujours dans le domaine de définition des populations. On devrait, selon les populations de départ, s'attendre soit à une courbe fermée, soit à une courbe tendant vers le point $(p, 0)$ lorsque l'on porte y_n en fonction de x_n . La figure 3 montre que tel n'est pas le cas lorsqu'on part des populations initiales (200, 460, 340). Dès la troisième itération les sous-populations x_3 et y_3 ont respectivement un effectif de 582,4 et 462,1 individus dont la somme dépasse la population totale du pays, supposée ici constante et égale à mille individus.

Cela est lié au fait que les indices d'intensité m_{13} et m_{31} égaux respectivement à $1,7 \times 10^{-3}$ et $1,65 \times 10^{-3}$ sont supérieurs à l'inverse de la population totale, ici un millièbre.

Dans certains cas également un comportement dit « chaotique » peut apparaître. Du fait de la complexité du calcul des points des cycles supé-

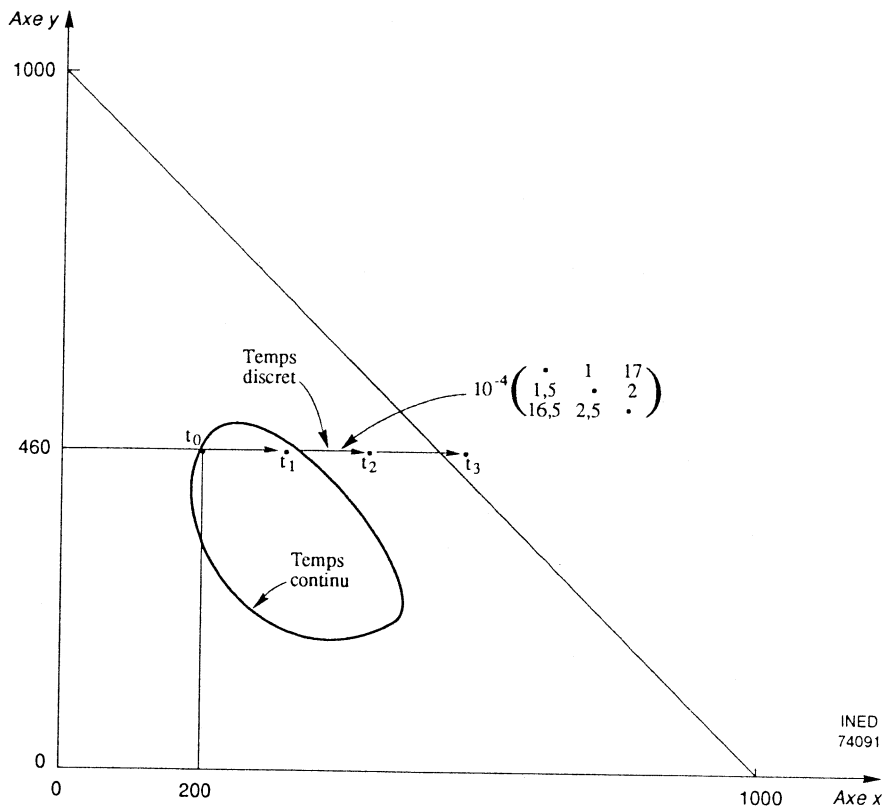


Figure 3. – Variation des populations y_n (cf. $y(t)$) en fonction de x_n (cf. $x(t)$) lorsque la trajectoire, en temps discret, sort du domaine de définition des populations (y_3) tandis qu'en temps continu, cette trajectoire est toujours dans ce domaine.

rieurs à 1 ($x_{n+k} = x_n$ et $y_{n+k} = y_n$), la recherche des domaines de stabilité et d'instabilité ne peut pas être menée à fond ici. Nous donnons seulement un exemple pratique d'instabilité lorsque les populations initiales sont $p_0 = (250, 500, 250)$ et les indices d'intensité sont en p. 10 000 :

$$m_{12} = 12; m_{13} = 12; m_{21} = 15; m_{23} = 15; m_{31} = 10; m_{32} = 450.$$

On vérifie dans ce cas que les trois sommets du domaine de définition sont répulsifs et que le quatrième point fixe est dans le domaine de définition des populations. Cependant les valeurs successives de y_n en fonction de x_n suivent un comportement « chaotique » comme le montre la figure 4 : aucune trajectoire sous-jacente aux points de la récurrence n'apparaît, mais un nuage de points situés dans un sous-espace des valeurs possibles des populations. La figure 5 porte les deux premières sous-populations en fonction de la durée écoulée depuis le début des perspectives. Les points se situent toujours sur une courbe sous-jacente, mais celle-ci est loin d'être parfaitement périodique. La complexité du comportement observé est telle que celui-ci semble « chaotique », sans que cette apparence puisse être attribuée à des fluctuations erratiques des paramètres du processus, puisque le modèle lui-même est déterministe.

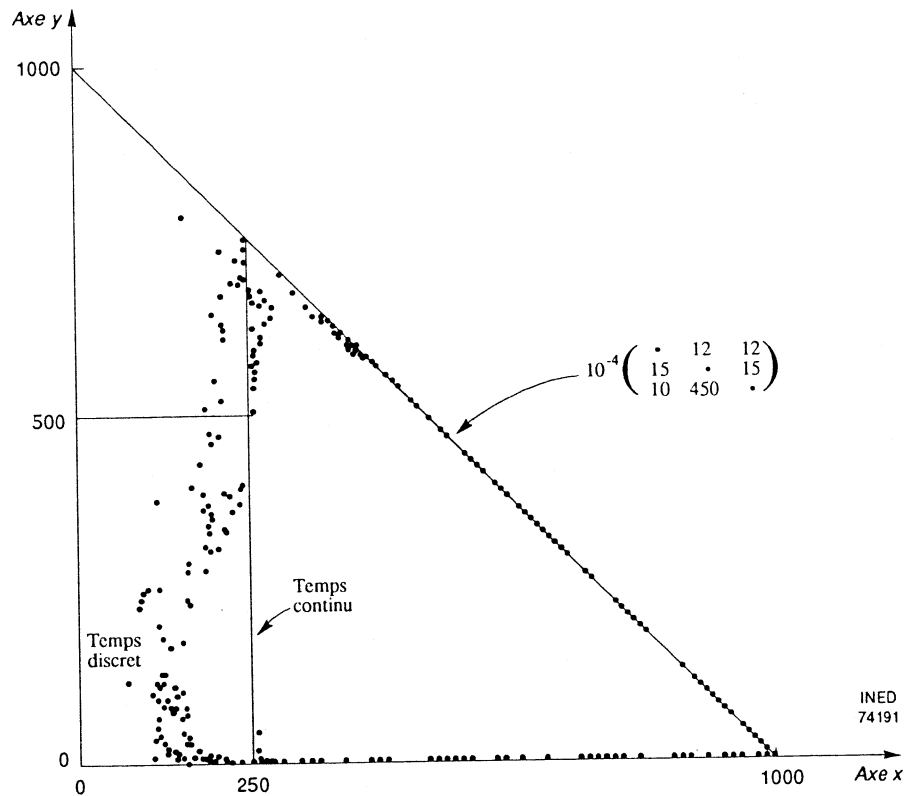


Figure 4. — Variation des populations y_n (cf. $y(t)$) en fonction de x_n (cf. $x(t)$), lorsque la trajectoire, en temps discret, devient « chaotique » tandis qu'elle reste bien définie en temps continu.

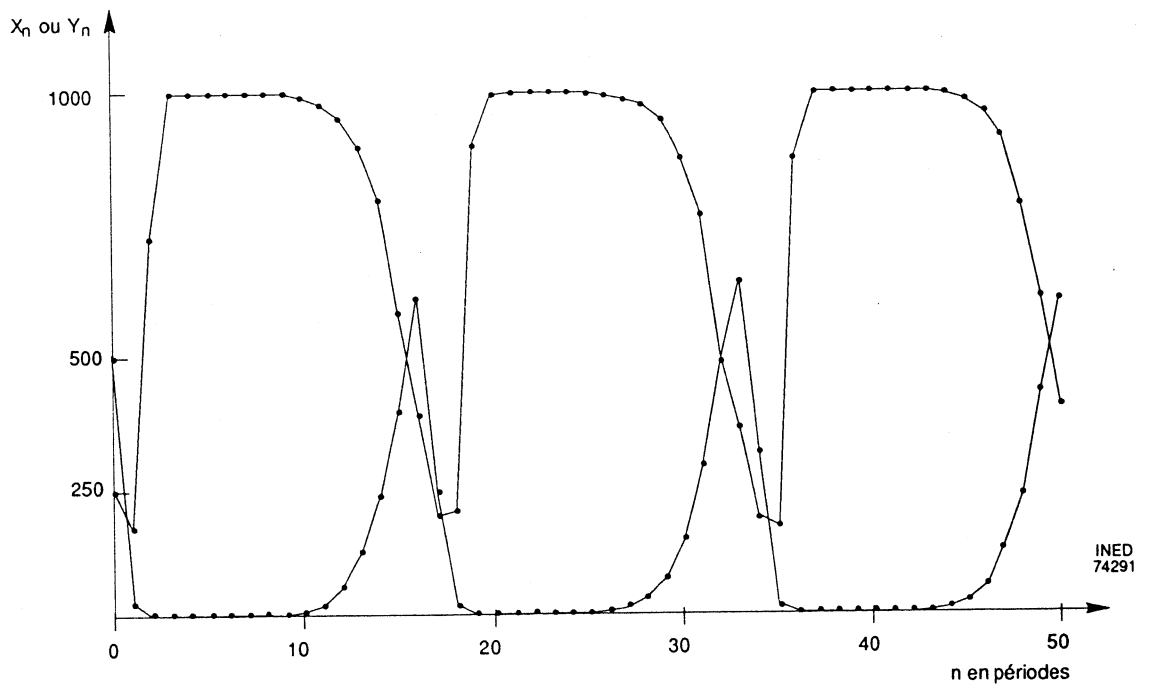


Figure 5. — Variation des populations x_n et y_n en fonction de la période intercensitaire n dans le cas « chaotique » décrit dans la figure 4.

Ces résultats, peu satisfaisants pour le démographe, sont liés au fait que l'on travaille en temps discret. D'où l'idée de traiter le même problème en faisant intervenir cette fois-ci un temps continu.

IV. – Modèle en temps continu

Comme pour le modèle en temps discret, nous donnerons d'abord une formulation du modèle pour un nombre quelconque de régions avant de nous cantonner au cas de trois régions.

a) *Présentation du modèle pour un nombre quelconque de régions*

Lorsque l'intervalle de temps sur lequel on mesure l'indice d'intensité tend vers zéro, on peut définir, de façon similaire à un quotient instantané,

un indice d'intensité instantané :

$$m_{ij} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{M_{ij}(t, t + dt)}{P_i(t) P_j(t + dt) dt} \quad [11]$$

Dans ce cas, la relation [2] peut s'écrire :

$$dP_j(t) = P_j(t) dt \sum_{i \neq j} (m_{ij} - m_{ji}) P_i(t) \quad [12]$$

Etant donné que la somme des n sous-populations reste constante au cours du temps, on dispose donc d'une intégrale première et le système d'équations différentielles est d'ordre $(n - 1)$. Dans ces conditions, on sait qu'il existe une solution unique, passant par le point initial (les sous-populations de départ). De plus, du fait que la dérivée de $P_j(t)$ par rapport à t tend vers zéro lorsque la fonction $P_j(t)$ tend elle-même vers zéro, cette solution sera toujours dans le domaine de définition des populations. On vérifie enfin facilement que les points fixes de ce système (points où toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles) sont les mêmes que ceux de la récurrence précédente, si l'on prend les indices d'intensité instantanés égaux aux indices d'intensité calculés sur la période (t_0, t_1) .

Voyons maintenant plus en détail le cas de trois sous-populations.

b) *Le cas de trois sous-populations*

On vérifie aisément dans ce cas qu'en plus de la relation $x(t) + y(t) + z(t) = p$ où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les trois sous-populations

à l'instant t , la relation suivante est aussi vérifiée

$$(m_{23} - m_{32}) \frac{dx(t)}{x(t) dt} + (m_{31} - m_{13}) \frac{dy(t)}{y(t) dt} + (m_{12} - m_{21}) \frac{dz(t)}{z(t) dt} = 0 \quad [13]$$

Sous ces conditions on obtient, en combinaison avec la précédente intégrale première, la solution générale liant $x(t)$ à $y(t)$:

$$(m_{23} - m_{32}) \log \frac{x(t)}{x(0)} + (m_{31} - m_{13}) \log \frac{y(t)}{y(0)} + (m_{12} - m_{21}) \log \frac{(p - x(t) - y(t))}{z(0)} = 0 \quad [14]$$

Cette relation permet de vérifier que par un point donné $(x(0), y(0))$ de l'espace de phase des coordonnées $(x(t), y(t))$ passe une courbe et une seule, représentant l'évolution en temps continu des populations lorsque les intensités instantanées restent constantes. L'intégration du système [12] montre qu'il suffit de connaître les trois combinaisons d'indices $(m_{23} - m_{32})$, $(m_{31} - m_{13})$ et $(m_{12} - m_{21})$ pour déterminer l'évolution en fonction du temps des populations $x(t)$ et $y(t)$, alors qu'en temps discret les six indices sont nécessaires pour connaître cette évolution.

On peut vérifier à partir de la relation [14] que lorsque les trois combinaisons d'indices précédentes sont de même signe, les trajectoires sont fermées et décrivent une trajectoire de type cyclique autour du quatrième point fixe. Si l'une des combinaisons a un signe différent d'une autre, alors les trajectoires vont tendre vers le sommet attractif. Ce sont les solutions que nous avons obtenues pour le cas discret lorsque les intensités étaient très faibles.

Reprenant les exemples précédents, nous avons déterminé les trajectoires en temps continu correspondant aux mêmes indices d'intensité qu'en temps discret. Bien qu'il soit possible avec certaines valeurs des indices d'exprimer explicitement $y(t)$ en fonction de $x(t)$, nous avons intégré la relation [12], en utilisant une méthode itérative pour chaque intervalle de temps unitaire, divisé en intervalles d'un millièbre.

La figure 1 nous montre, que lorsque les indices sont faibles (inférieurs ici à l'inverse de la population totale du pays), la courbe en temps continu est très proche de la courbe en temps discret. Courbe fermée dans le premier cas, courbe tendant vers le point $(0, p)$ dans le second cas. En revanche, la figure 3 nous montre combien ces courbes vont différer lorsque les indices sont plus élevés : dans le cas où la courbe en temps discret sort du domaine de définition des populations, la courbe en temps continu reste toujours dans ce domaine. Enfin, la figure 4 nous montre que la courbe continue reste toujours bien définie alors que la trajectoire discrète devient chaotique.

Conclusion

Après avoir montré les raisons pour lesquelles l'utilisation de taux d'émigration nous semblait peu satisfaisante lorsque l'on réalise des perspectives avec migration, nous avons proposé d'utiliser les intensités migratoires entre les diverses régions. Elles présentent l'avantage de ne privilégier ni la population de départ, ni celle d'accueil, mais de leur donner un poids égal, ce qui a été vérifié dans de très nombreuses études.

Les perspectives réalisées en temps discret avec ces intensités conduisent à des résultats qui diffèrent rapidement des perspectives classiques avec les taux d'émigration. Mais surtout, alors que le modèle markovien des perspectives classiques conduit à un état stable, ce nouveau modèle conduit à des solutions complètement distinctes sur le long terme : certaines populations s'éteindront, d'autres suivront une évolution cyclique.

Des comportements encore plus complexes peuvent apparaître. Dans certains cas des populations peuvent sortir de l'intervalle de variation et être supérieures à la population totale du pays ou devenir négatives. Dans d'autres cas, on voit apparaître des solutions « chaotiques » qui ne donnent plus une courbe simple d'évolution des diverses populations les unes par rapport aux autres, mais conduisent à un nuage de points. D'autres cas aberrants peuvent d'ailleurs se produire dont nous n'avons pas donné d'exemple ici : solutions cycliques autour des points de cycle d'ordre k supérieures à l'unité ($x_{n+k} = x_n$ et $y_{n+k} = y_n$), cas où l'on a, à la fois, un point fixe « centre » et un point fixe attractif, etc...

D'où l'idée de passer en temps continu, en conservant les intensités calculées en temps discret qui deviennent des intensités instantanées. Il en résulte une solution toujours unique partant des sous-populations de départ données. Dans le cas de trois sous-populations, on pourra, selon les intensités avoir des solutions cycliques autour du « centre » ou bien avoir certaines populations qui tendent vers zéro : deux peuvent tendre vers zéro et la troisième vers p , une seule peut tendre vers zéro et les deux autres vers des valeurs fixes, mais non nulles⁽⁵⁾.

Cet article a essayé de montrer la complexité de ces perspectives dès que le modèle devient non linéaire. Les récurrences rencontrées en temps discret mettent en évidence certains comportements dynamiques complexes dus à l'effet de fortes non linéarités. Si les récurrences en temps continu semblent conduire à des solutions plus simples, elles posent encore de nombreux problèmes. Ainsi lorsque l'on conserve les intensités calculées en temps discret pour en faire des intensités instantanées, la solution en temps continu ne passe plus par les deux points (sous-populations en t_1 , et en

⁽⁵⁾ On peut en effet montrer que dans le cas de deux sous-populations, il n'y a pas de solutions cycliques.

t_2) qui ont servi à définir les intensités. Pour éviter ce résultat gênant, on est conduit à estimer de nouvelles intensités théoriques instantanées. C'est là un nouveau problème que nous ne pouvons pas résoudre dans cet article, mais qui est important à considérer.

Les perspectives markoviennes avec migrations donnent certes des résultats stables et simples, mais les hypothèses qui sont à leur base sont beaucoup trop simplificatrices pour conduire à des projections vraisemblables. Il sera nécessaire à l'avenir d'introduire des conditions d'interaction entre les diverses zones du territoire pour arriver à des solutions plus satisfaisantes. Le présent essai, en faisant intervenir simplement les populations de départ et d'arrivée, a montré la complexité des problèmes à résoudre pour réaliser ces projections. La complexité de cette tâche ne doit cependant pas nous faire lâcher prise, mais au contraire, être un stimulant pour la recherche à venir.

Daniel COURGEAU

BIBLIOGRAPHIE

- CAZIN François, 1975 – Perspectives démographiques régionales et urbaines préparatoires au VIème Plan, in *Migrations intérieures. Méthodes d'observation et d'analyse*. Colloques nationaux du CNRS, CNRS, Paris, pp. 101-122.
- COURGEAU Daniel, 1970 – *Les champs migratoires en France*, cahier « Travaux et Documents », n° 58, INED-PUF, 158 p.
- COURGEAU Daniel, 1975 – « L'intensité des changements de catégories de communes », *Population*, 30, n° 1, pp. 81-102.
- COURGEAU Daniel, 1988 – *Méthodes de mesure de la mobilité spatiale : migrations internes, mobilité temporaire, navettes*, Manuel de l'INED, Paris, 301 p.
- COURGEAU Daniel, 1990 – *Un modèle non markovien pour des projections de populations urbaines*, III^e Séminaire International de l'AIDELF, Rabat, 12 p.
- GUMOWSKI, I., MIRA C., 1980 – *Dynamique chaotique. Transformations ponctuelles. Transition ordre-désordre*. Cepadues Editions, Toulouse, 480 p.
- HENRY Louis, 1973 – *Perspectives démographiques*, Editions de l'INED, Paris, 115 p.
- POULAIN Michel, 1981 – *Contribution à l'analyse spatiale d'une matrice de migration interne*, Recherches Démographiques, Cahier n° 3, Cabay, Louvain-la-Neuve, 225 p.
- PRESSAT Roland, 1957 – « La population agricole en France : structure actuelle et prévisions jusqu'en 1966 », *Population*, 12, 1, pp. 17-35.
- ROGERS Andrei, 1975 – *Introduction to multiregional mathematical demography*, John Wiley, New York.
- ROGERS Andrei, 1976 – « Shrinking large-scale population – projection models by aggregation and decomposition », *Environment and Planning A*, 8, 515-541.
- ROGERS Andrei, WILLEKENS Frans, 1986 – *Migration and settlement. A multiregional comparative study*, D. Reidel Publishing Company, Hollande, 495 p.
- STEWART Charles, 1960 – « Migration as a function of population and distance », *American Sociological Review*, 25, pp. 347-356.
- ZIPF George Kinsley, 1946 – « The P1 P2/D hypothesis : on the intercity movement of persons », *American Sociological Review*, 11, pp. 677-686.

COURGEAU (Daniel). – **Perspectives avec migrations**

Si les perspectives de naissances et de décès posent déjà de nombreuses hypothèses, celles qui introduisent l'effet des migrations sont encore plus complexes. On a coutume pour ce faire de calculer des taux d'émigration, que l'on applique aux populations des zones de départ. On aboutit ainsi à un processus markovien dont les propriétés sont bien connues et qui conduit à la limite à des populations régionales stables.

Or, de nombreuses études ont montré que de tels taux sont peu satisfaisants pour caractériser les flux entre zones. Les indices d'intensité migratoire qui font intervenir, à la fois, la population de départ et celle d'arrivée, constituent un substitut à ces taux, bien plus satisfaisant tant au point de vue théorique que pratique.

L'utilisation de tels indices, calculés sur une période finie (intercensitaire, par exemple), conduit à des perspectives très rapidement différentes de celles qui utilisent des taux d'émigration. En particulier, il n'y a généralement plus de populations limites stables et certaines populations peuvent s'éteindre. Dans certains cas cependant, ces perspectives en arrivent à des situations incompatibles avec l'observation démographique : certaines populations peuvent en particulier devenir négatives.

Ces incohérences venant de l'utilisation d'un modèle en temps discret, nous étudions dès lors ce qui se passe si l'on situe un tel modèle dans un temps continu. Sous ces conditions, les difficultés rencontrées en temps discret sont levées. On a dans tous les cas une solution unique pour des conditions initiales ainsi que des indices d'intensité migratoire instantanés donnés. La comparaison est faite entre modèles en temps discret et en temps continu à l'aide de divers exemples.

L'utilisation d'un modèle en temps continu pose cependant de nouveaux problèmes, tels que celui de l'estimation d'un indice d'intensité instantané qui permette de retrouver les effectifs de migrants recensés au cours d'une période intercensitaire.

Bien que ces indices ne conduisent plus à des populations stables, ils permettent de mieux déceler les interactions qui existent entre les populations de diverses régions et de montrer les conséquences que l'on peut en attendre. Leur utilisation doit être généralisée aux cas de populations décomposées par âges et en diverses catégories (professionnelles, matrimoniales, etc.).

COURGEAU (Daniel). – **Projections that Include Migration**

Projections of births and deaths can be based on different assumptions : the situation becomes even more complex when migration is included. In general, emigration rates have been calculated and applied to the populations of countries of origin. The end result is a Markov process, with well known properties, and which ultimately leads to stable regional populations.

However, it has been shown in many studies that such rates are not very satisfactory to describe migration flows between different areas. Indices which include the populations of both the region of origin and the region of arrival are more satisfactory, both from the theoretical and the practical points of view.

The use of such indices over a finite period (between two censuses, for instance), leads to results very different from those obtained by using rates of emigration. In particular, populations do not tend towards stability, and some may even become extinct, or even negative.

These difficulties are the results of using a discrete-time model ; we therefore investigate what happens if continuous-time models are used. The difficulties caused by discrete-time models can be overcome. In all circumstances, there is a unique solution for a given initial population and hazards of moving. A number of continuous-time and discrete-time models are compared.

However, the use of continuous-time models leads to problems of its own, e.g. how to estimate a hazard function which would enable us to find the total number of migrants during an intercensal period.

Although these methods do not result in stable populations, they make it possible to disentangle the interactions that exist between populations of different regions and to show the consequences of this distribution. The methods should be generalized to populations to apply to populations disaggregated into sub-groups, e.g. age groups, occupational groups, or marital status groups.

COURGEAU (Daniel). – **Proyecciones con migraciones.**

Si las proyecciones de los nacimientos y de las defunciones plantean ya numerosas hipótesis, aquellas que introducen el efecto de las migraciones son todavía más complejas. Para esto, se ha acostumbrado calcular tasas de emigración que se aplican a las poblaciones de las zonas de partida. Llegando así, a un proceso markoviano, cuyas propiedades son bien conocidas y que conduce, en última instancia, a las poblaciones regionales estables.

Ahora bien, numerosos estudios han mostrado que tales tasas son poco satisfactorias para caracterizar los flujos entre zonas. Los índices de intensidad migratoria, que hacen intervenir al mismo tiempo la población inicial y la población final, constituyen un sustituto de esas tasas, mucho más satisfactorios, tanto del punto de vista teórico como práctico.

La utilización de tales índices, calculados sobre un período terminado (intercensal, por ejemplo), conduce a proyecciones, muy rápidamente diferentes, de aquellas que utilizan las tasas de emigración. En particular, casi ya no existen poblaciones límites estables y ciertas poblaciones pueden extinguirse. Sin embargo, en algunos casos, esas proyecciones llegan a situaciones incompatibles con l'observación demográfica: algunas poblaciones pueden en particular, devenir negativas.

Esas incoherencias, viniendo de la utilización de un modelo en tiempo discontinuo, estudiaremos entonces lo que sucede, si situamos tal modelo en un tiempo continuo. Bajo esas condiciones, las dificultades encontradas en tiempo discontinuo han desaparecido. En todo caso tenemos una única solución para las condiciones iniciales, así como para los índices dados de intensidad migratoria instantánea. La comparación es realizada entre modelos en tiempo discontinuo y en tiempo continuo, con ayuda de diversos ejemplos.

Sin embargo, la utilización de un modelo en tiempo continuo plantea nuevos problemas, como el de la estimación de un índice de intensidad instantánea que permite encontrar el número de efectivos de migrantes empadronados en el transcurso de un período intercensal.

Aunque esos índices no conducen más a poblaciones estables, ellos permiten de descubrir mejor, las interacciones que existen entre las poblaciones de diversas regiones y de mostrar las consecuencias que se pueden esperar. Su utilización debe ser generalizada a los casos de poblaciones clasificadas por edad y en diversas categorías (profesionales, matrimoniales, etc.).